z. 37.10 s. 122

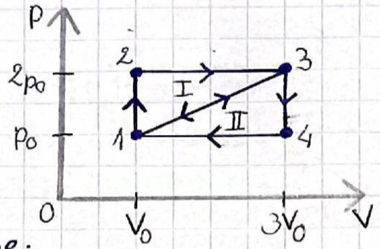
Na rysunku przedstawiono dwa cykle zamknięte, którym podlega gaz doskonały:

I. $1 \to 2 \to 3 \to 1$,

II. $1 \to 3 \to 4 \to 1$.

a) Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki zastosowanej do pierwszego cyklu oraz definicji sprawności wykaż, że sprawność drugiego cyklu jest większa niż sprawność pierwszego.

b) Oblicz stosunek $\frac{\eta_{II}}{\eta_I}$, jeżeli wiadomo, że użyty gaz jest jednoatomowy.



Dane:

Korzystamy z równania Clapeyrona: $pV = nRT$

Z wykresu odczytujemy:

dla stanu 1: $p_1 = p_0$, $V_1 = V_0$, $T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{p_0 V_0}{nR} = T_0$

dla stanu 2: $p_2 = 2p_0$, $V_2 = V_0$, $T_2 = \frac{p_2 V_2}{nR} = \frac{2p_0 V_0}{nR} = \cancel{6T_0}\, 2T_0$

dla stanu 3: $p_3 = 2p_0$, $V_3 = 3V_0$, $T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = \frac{2p_0 3V_0}{nR} = 6T_0$

dla stanu 4: $p_4 = p_0$, $V_4 = 3V_0$, $T_4 = \frac{p_4 V_4}{nR} = \frac{p_0 3V_0}{nR} = 3T_0$

Wprowadzamy oznaczenie:

$C_V = aR$

$C_p = R + C_V \Rightarrow C_p = (1+a)R$

a) Z definicji sprawności wiemy, że to iloraz wykonanej pracy do ciepła pobranego w procesie: $\eta = \frac{W}{Q_{pobrane}}$

Z wykresu odczytujemy, że dla I cyklu temperatura wzrasta w przemianie z 1 do 2 oraz z 2 do 3, czyli ciepło pobrane w tej przemianie wynosi: $Q_{pobrane\,I} = Q_{1\to2} + Q_{2\to3}$

Przemiana z 1 do 2 odbywa się przy stałej objętości, czyli jest izochoryczna. Ilość ciepła potrzebna do określonego przyrostu temperatury n moli gazu przy stałej objętości wyraża się wzorem:

$Q = nC_v \Delta T$, gdzie Q – ciepło oddane lub pobrane przez ciało o liczbie moli n przy zmianie temperatury o ΔT

C_v – ciepło molowe przy stałej objętości

Oznacza to, że:

$$Q_{1\to2} = naR(T_2 - T_1)$$
$$Q_{1\to2} = naR(2T_0 - T_0)$$
$$Q_{1\to2} = naRT_0$$

Przemiana z 2 do 3 odbywa się przy stałym ciśnieniu, czyli jest izobaryczna. Ilość ciepła potrzebna do określonego przyrostu temperatury n moli gazu wyraża się wzorem przy stałym ciśnieniu:

$Q = nC_p \Delta T$, gdzie Q – ciepło oddane lub pobrane przez ciało o liczbie moli n przy zmianie temperatury ΔT

C_p – ciepło molowe przy stałym ciśnieniu

$$Q_{2\to3} = n(a+1)R(T_3 - T_2)$$
$$Q_{2\to3} = n(a+1)R(6T_0 - 2T_0)$$
$$Q_{2\to3} = n(a+1)R \cdot 4T_0$$
$$Q_{2\to3} = 4(a+1)nRT_0$$

Oznacza to, że całkowite ciepło pobrane w tej przemianie wynosi:

$$Q_{pobrane\,I} = anRT_0 + 4(a+1)nRT_0$$
$$Q_{pobrane\,I} = [a + 4(a+1)]nRT_0$$
$$Q_{pobrane\,I} = [a + 4a + 4]nRT_0$$
$$Q_{pobrane\,I} = [5a + 4]nRT_0$$

Pracę w tym cyklu obliczamy jako pole powierzchni ograniczone wykresem i w tym przypadku odpowiada ono polu trójkąta prostokątnego:

$$W_I = \frac{1}{2}(3V_0 - V_0)(2p_0 - p_0)$$
$$W_I = \frac{1}{2} \cdot 2V_0 \cdot p_0$$
$$W_I = V_0 p_0 = nRT_0$$

Sprawność pierwszego cyklu wynosi:

$$\eta_I = \frac{W_I}{Q_{pobrane\,I}}$$

$$\eta_I = \frac{nRT_0}{[5a+4]\,nRT_0}$$

$$\eta_I = \frac{1}{5a+4}$$

W drugim cyklu temperatura wzrasta w przemianie z 1 do 3. Wówczas wzrasta również ciśnienie i objętość. Zmianę energii wewnętrznej w dowolnej przemianie cyklu gazu doskonałego możemy przedstawić wzorem: $\Delta U = nC_V\Delta T$

$$\Delta U_{1\to3} = naR\Delta T$$

$$\Delta U_{1\to3} = naR(T_3 - T_1)$$

$$\Delta U_{1\to3} = naR(6T_0 - T_0)$$

$$\Delta U_{1\to3} = naR\cdot 5T_0$$

$$\Delta U_{1\to3} = 5aRT_0$$

Praca wykonana w tej przemianie będzie polem pod jej wykresem odpowiadającym polu trapezu:

$$W_{1\to3} = \frac{1}{2}(2p_0 + p_0)(3V_0 - V_0)$$

$$W_{1\to3} = \frac{1}{2}\cdot 3p_0\cdot 2V_0$$

$$W_{1\to3} = 3p_0V_0$$

$$W_{1\to3} = 3nRT_0$$

Gaz w tej przemianie rozpręża się, czyli to on wykonuje pracę. Zgodnie z I zasadą termodynamiki ciepło pobrane w drugim cyklu będzie wynosiło:

$$-W_{1\to3} + Q_{pobrane\,II} = \Delta U_{1\to3}$$

$$-3nRT_0 + Q_{pobrane\,II} = 4aRT_0 \quad |+3nRT_0$$

$$Q_{pobrane\,II} = 5aRT_0 + 3nRT_0$$

$$Q_{pobrane\,II} = (5a+3)nRT_0$$

Praca wykonana w całym cyklu odpowiada polu trójkąta prostokątnego:

$$W_{II} = \frac{1}{2}\cdot(2p_0 - p_0)\cdot(3V_0 - V_0)$$

$$W_{II} = \frac{1}{2}\,p_0\cdot 2V_0$$

$$W_{II} = p_0V_0$$

$W_{II} = nRT_0$

Sprawność drugiego cyklu wynosi:

$$\eta_{II} = \frac{W_{II}}{Q_{pobraneII}}$$

$$\eta_{II} = \frac{nRT_0}{(5a+3)nRT_0}$$

$$\eta_{II} = \frac{1}{5a+3}$$

Wykażmy, że sprawność drugiego cyklu jest większa niż sprawność pierwszego: $\eta_{II} > \eta_{I}$

Wiadomo, że współczynnik a na pewno jest większy od jedynki: $a > 1$, więc

$$\frac{1}{5a+3} > \frac{1}{5a+4}$$

$$5a+3 < 5a+4 \quad | -5a$$

$$3 < 4$$

Zawsze prawda, czyli sprawność drugiego cyklu jest większa niż sprawność pierwszego cyklu

b) Obliczamy stosunek sprawności cykli dla przypadku, gdy mamy gaz jednoatomowy:

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\cancel{\frac{\eta_{II} = \frac{1}{5a+3}}{\eta_I}} \qquad \frac{\eta_{II}}{\eta_I} = \frac{\frac{1}{5a+3}}{\frac{1}{5a+4}}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{1}{5a+3} \cdot \frac{5a+4}{1}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{5a+4}{5a+3}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{5 \cdot \frac{3}{2} + 4}{5 \cdot \frac{3}{2} + 3}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{\frac{15}{2} + 4}{\frac{15}{2} + 3}$$

$$\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{\frac{1}{2}(15+8)}{\frac{1}{2}(15+6)}$$

$$\underline{\frac{\eta_{II}}{\eta_{I}} = \frac{23}{21}}$$